

Министерство образования и молодежной политики
Республики Коми
"Сыктывкарский политехнический техникум"

Методическое пособие
по математике

Основные теоретические положения

Составитель преподаватель Орлова Светлана Владимировна
преподаватель Панюкwa Нина Генадьевна

Одобрено на заседании ЦК _____ протокол № _____
от _____

Пояснительная записка

Данное методическое пособие предназначено для студентов "Сыктывкарского политехнического техникума" и содержит материал включающий основные понятия дифференциальных уравнений.

Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Решение различных геометрических, физических, инженерных и финансовых задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту или иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение a является производной по времени t от скорости V , которая также является производной по времени t от перемещения S . Т.е.

$$V = \frac{dS}{dt}; \quad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2};$$

Тогда получаем: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t) \cdot t}{2}$ - уравнение связывает функцию $f(t)$ с независимой переменной t и производной второго порядка функции $f(t)$.

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Определение. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных**.

Определение. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения**.

Пример.

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x \frac{d^2 y}{dx^2} + xy \frac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка.

В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Определение. **Общим решением** дифференциального уравнения первого называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения.

1) Т.к. постоянная C – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких-либо начальных условиях $x = x_0, y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

Определение. Решение вида $y = \varphi(x, C_0)$ называется **частным решением** дифференциального уравнения.

Определение. Задачей Коши (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши. (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x, y)$, то какова бы не была точка (x_0, y_0) в области D , существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0 , принимающее при $x = x_0$ значение $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

Определение. Интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$x dy = -y dx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$y = \frac{C}{x}$ - это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тогда имеем

$$2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).

$$y = \frac{2}{x}$$

Определение. Интегральной кривой называется график $y = \varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости XOY .

Определение. Особым решением дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной C . Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной C .

Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

Отметим, что не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

Пример. Найдите общее решение дифференциального уравнения: $y' + y = 0$. Найдите особое решение, если оно существует.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -y \\ \frac{dy}{y} &= -dx \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int dx \\ \ln y &= -x + C \\ y &= e^{-x} \cdot e^C \\ y &= C_1 \cdot e^{-x}\end{aligned}$$

Данное дифференциальное уравнение имеет также особое решение $y = 0$. Это решение невозможно получить из общего, однако при подстановке в исходное уравнение получаем тождество. Мнение, что решение $y = 0$ можно получить из общего решения при $C_1 = 0$ ошибочно, ведь $C_1 = e^C \neq 0$.

Далее рассмотрим подробнее приемы и методы, которые используются при решении дифференциальных уравнений различных типов.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида: $F(x, y, y') = 0$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, **разрешенным относительно производной.**

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad dy = f(x, y)dx; \quad f(x, y)dx - dy = 0;$$

Функцию $f(x, y)$ представим в виде: $f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, $Q(x, y) \neq 0$; тогда при подстановке в полученное выше уравнение имеем:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

- это так называемая **дифференциальная форма** уравнения первого порядка.

Далее рассмотрим подробнее типы уравнений первого порядка и методы их решения.

Уравнения вида $y' = f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ – определена и непрерывна на некотором интервале $a < x < b$. В таком случае все решения данного дифференциального уравнения находятся как $y = \int f(x)dx + C$. Если заданы начальные условия x_0 и y_0 , то можно определить постоянную C .

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Такое уравнение можно представить также в виде:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \text{ при } \beta(y) \neq 0;$$

Перейдем к новым обозначениям $\alpha(x) = -X(x)$; $\frac{1}{\beta(y)} = Y(y)$;

Получаем:

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0;$$

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина C , а, соответственно, и частное решение.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$

$$y \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$y \cos y dy = -2x dx$$

$$\int y \cos y dy = -2 \int x dx$$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям

$$\int y \cos y dy = \left\{ \begin{array}{l} u = y; \quad dv = \cos y dy; \\ du = dy; \quad v = \sin y \end{array} \right\} = y \sin y - \int \sin y dy = y \sin y + \cos y$$

$$y \sin y + \cos y = -x^2 + C$$

$$y \sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается **отличие общего (частного) интеграла от общего (частного) решения.**

Чтобы проверить правильность полученного ответа продифференцируем его по переменной x .

$$y' \sin y + yy' \cos y - y' \sin y + 2x = 0$$

$$yy' = -\frac{2x}{\cos y} \text{ - верно}$$

Пример. Найти решение дифференциального уравнения $\frac{y}{y'} = \ln y$ при условии $y(2) = 1$.

$$\begin{aligned}\frac{y dx}{dy} &= \ln y \\ dx &= \frac{\ln y dy}{y} \\ \int dx &= \int \frac{\ln y dy}{y} \\ x + C &= \int \ln y d(\ln y) \\ x + C &= \frac{\ln^2 y}{2}\end{aligned}$$

при $y(2) = 1$ получаем $2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}$; $\Rightarrow 2 + C = 0$; $\Rightarrow C = -2$;

Итого: $2(x-2) = \ln^2 y$; или $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - частное решение;

Проверка: $y' = e^{\pm\sqrt{2x-4}} \cdot \frac{2}{\pm 2\sqrt{2x-4}}$, итого

$$\frac{y}{y'} = \frac{e^{\pm\sqrt{2x-4}} (\pm\sqrt{2x-4})}{e^{\pm\sqrt{2x-4}}} = \pm\sqrt{2x-4} = \ln y - \text{верно.}$$

Пример. Решить уравнение $y' = y^{2/3}$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y^{2/3} \\ y^{-2/3} dy &= dx \\ \int y^{-2/3} dy &= \int dx \\ 3y^{1/3} &= x + C \\ 27y &= (x + C)^3 - \text{общий интеграл} \\ y &= \frac{1}{27}(x + C)^3 - \text{общее решение}\end{aligned}$$

Пример. Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1)$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y^2 + 1} &= dx; \quad \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx; \\ \arctg y &= \frac{x^2}{2} + C; \quad y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right);\end{aligned}$$

Пример. Решить уравнение $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$ при условии $y(1) = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{y dy}{dx} + x e^y &= 0 \\ y dy + x e^y dx &= 0; \quad \frac{y}{e^y} dy = -x dx; \\ \int \frac{y}{e^y} dy &= -\int x dx;\end{aligned}$$

Интеграл, стоящий в левой части будем брать по частям.

$$\int ye^{-y} dy = \left\{ \begin{array}{l} u = y; \quad e^{-y} dy = dy; \\ du = dy; \quad v = -e^{-y}; \end{array} \right\} = -e^{-y} y - \int -e^{-y} dy = -e^{-y} y - e^{-y} = -e^{-y} (y+1);$$

$$e^{-y} (y+1) = \frac{x^2}{2} + C_0;$$

$$2e^{-y} (y+1) = x^2 + C$$

Если $y(1) = 0$, то $2e^0(0+1) = 1+C$; $\Rightarrow 2 = 1+C$; $\Rightarrow C = 1$;

Итого, частный интеграл: $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$.

Пример. Решить уравнение $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$.

$$y' + \sin(x+y) - \sin(x-y) = 0$$

$$y' - 2 \sin \frac{x-y-x-y}{2} \cos \frac{x-y+x+y}{2} = 0$$

$$y' - 2 \sin(-y) \cos x = 0$$

$$y' + 2 \sin y \cos x = 0$$

$$\frac{dy}{\sin y} = -2 \cos x dx; \quad \int \frac{dy}{\sin y} = -2 \int \cos x dx;$$

Для нахождения интеграла, стоящего в левой части уравнения.

Получаем общий интеграл:

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| = -2 \sin x + C$$

Пример. Решить уравнение $2xe^{-x^2} + \frac{y'}{y} = 0$

Преобразуем заданное уравнение:

$$2xe^{-x^2} + \frac{dy}{y dx} = 0$$

$$2xe^{-x^2} dx + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int 2xe^{-x^2} dx + \int \frac{dy}{y} = C$$

$$-e^{-x^2} + \ln|y| = C$$

Получили общий интеграл данного дифференциального уравнения. Если из этого соотношения выразить искомую функцию y , то получим общее решение.

Пример. Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1)$$

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = x dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int x dx; \quad \operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + C;$$

$$y = \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{2} + C \right)$$

Допустим, заданы некоторые начальные условия x_0 и y_0 . Тогда:

$$\operatorname{arctg} y_0 = \frac{x_0^2}{2} + C_0; \Rightarrow C_0 = \operatorname{arctg} y_0 - \frac{x_0^2}{2};$$

Получаем частное решение $y = \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{2} + \operatorname{arctg} y_0 - \frac{x_0^2}{2} \right)$.

Однородные уравнения.

Определение. Функция $f(x, y)$ называется **однородной n – го измерения** относительно своих аргументов x и y , если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Пример. Является ли однородной функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2y$?

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2ty = t^3x^3 + 3t^3x^2y = t^3(x^3 + 3x^2y) = t^3 f(x, y)$$

Таким образом, функция $f(x, y)$ является однородной 3-го порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если его правая часть $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является однородным, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y' = f(x, y)$.

Т.к. функция $f(x, y)$ – однородная нулевого измерения, то можно записать $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Параметр t вообще говоря произвольный, предположим, что $t = \frac{1}{x}$. Получаем:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u = \frac{y}{x}$, т.е.

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u);$$

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде: $y' = \varphi(u)$

Далее заменяем $y = ux$, $y' = u'x + ux'$.

$$u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u .

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Далее, заменив вспомогательную функцию u на ее выражение через x и y и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

Пример. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} + 1 \right)$.

Введем вспомогательную функцию u .

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u.$$

Отметим, что введенная нами функция u всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее $\ln u = \ln \frac{y}{x}$.

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u \ln u + u; \quad u'x = u \ln u;$$

Разделяем переменные: $\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}$; $\int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x}$;

Интегрируя, получаем: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C$; $\ln u = Cx$; $u = e^{Cx}$;

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y , получаем общее решение:

$$y = xe^{Cx}.$$

Уравнения, приводящиеся к однородным.

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут приведены к однородным.

Это уравнения вида $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$.

Если определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, то переменные могут быть разделены подстановкой

$$x = u + \alpha; \quad y = v + \beta;$$

где α и β - решения системы уравнений $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$

Пример. Решить уравнение $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$.

Получаем $(x - 2y + 3)\frac{dy}{dx} = -2x - y + 1$; $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y + 1}{x - 2y + 3}$;

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0$.

Решаем систему уравнений $\begin{cases} -2x - y + 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y = 1 - 2x \\ x - 2 + 4x + 3 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1/5 \\ y = 7/5 \end{cases}$;

Применяем подстановку $x = u - 1/5$; $y = v + 7/5$; в исходное уравнение:

$$(u - 1/5 - 2v - 14/5 + 3)dv + (2u - 2/5 + v + 7/5 - 1)du = 0;$$

$$(u - 2v)dv + (2u + v)du = 0;$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u + v}{2v - u} = \frac{2 + v/u}{2v/u - 1};$$

Заменяем переменную $\frac{v}{u} = t$; $v = ut$; $v' = t'u + t$; при подстановке в выражение, записанное выше, имеем:

$$t'u + t = \frac{2+t}{2t-1}$$

Разделяем переменные: $\frac{dt}{du}u = \frac{2+t}{2t-1} - t = \frac{2+t-2t^2+t}{2t-1} = \frac{2(1+t-t^2)}{2t-1}$;

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-2t}{1+t-t^2} dt; \quad \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \int \frac{(1-2t)dt}{1+t-t^2};$$

$$-\frac{1}{2} \ln|1+t-t^2| = \ln|u| + \ln C_1$$

$$\ln|1+t-t^2| = -2\ln|C_1 u|$$

$$\ln|1+t-t^2| = \ln \left| \frac{C_2}{u^2} \right|; \quad 1+t-t^2 = \frac{C_2}{u^2};$$

Переходим теперь к первоначальной функции y и переменной x .

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y-7/5}{x+1/5} = \frac{5y-7}{5x+1}; \quad u = x+1/5;$$

$$1 + \frac{5y-7}{5x+1} - \left(\frac{5y-7}{5x+1} \right)^2 = \frac{25C_2}{(5x+1)^2};$$

$$(5x+1)^2 + (5y-7)(5x+1) - (5y-7)^2 = 25C_2$$

$$25x^2 + 10x + 1 + 25xy + 5y - 35x - 7 - 25y^2 + 70y - 49 = 25C_2$$

$$25x^2 - 25x + 25xy + 75y - 25y^2 = 25C_2 + 49 - 1 + 7$$

$$x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C_2 + \frac{55}{25} = C;$$

Итого, выражение $x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C$ является общим интегралом исходного дифференциального уравнения.

В случае если в исходном уравнении вида $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$,

то переменные могут быть разделены подстановкой

$$ax + by = t.$$

Пример. Решить уравнение $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0$.

$$\text{Получаем } 2(x+y)\frac{dy}{dx} = -3x-3y+1; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-3x-3y+1}{2x+2y} = -\frac{3x+3y-1}{2x+2y};$$

$$\text{Находим значение определителя } \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6+6=0;$$

Применяем подстановку $3x+3y=t$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t'}{3} - 1;$$

Подставляем это выражение в исходное уравнение:

$$\frac{t'}{3} - 1 = -\frac{3(t-1)}{2t}; \quad 2t(t'-3) = -9t+9; \quad 2tt' = 6t-9t+9; \quad 2tt' = -3t+9;$$

Разделяем переменные: $\frac{2t}{-3t+9}dt = dx$; $\frac{t}{t-3}dt = -\frac{3}{2}dx$;

$$\int \left(1 + \frac{3}{t-3}\right) dt = -\frac{3}{2} \int dx;$$

$$t + 3 \ln|t-3| = -\frac{3}{2}x + C_1$$

Далее возвращаемся к первоначальной функции y и переменной x .

$$2x + 2y + 2 \ln|3(x+y-1)| = -x + C_2;$$

$$3x + 2y + 2 \ln 3 + 2 \ln|x+y-1| = C_2;$$

$$3x + 2y + 2 \ln|x+y-1| = C;$$

таким образом, мы получили общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Линейные уравнения.

Определение. Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть $Q(x)$ равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть $Q(x)$ не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

$P(x)$ и $Q(x)$ - функции непрерывные на некотором промежутке $a < x < b$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения.

Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$y' + P(x)y = 0.$$

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей.

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx;$$

Общее решение:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений ($Q(x) \neq 0$) применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли.

(Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик.)

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$
$$u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + P(x)u \right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1 \cdot 2x^2$; $y = 2 \cdot x^2$; $y = 2x \cdot x$; и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$.

Таким образом, возможно получить функцию u , проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \quad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \quad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$
$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \quad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции v подставим полученное выражение для функции u в исходное уравнение $u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + P(x)u \right) = Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx} \frac{dv}{dx} = Q(x); \quad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию v :

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_1; \quad v = \frac{1}{C} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y = uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_2 \right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_2 \right), \quad C_2 - \text{произвольный коэффициент.}$$

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Метод Лагранжа.

(Ларганж Жозеф Луи (1736-1813) - французский математик, през. Берлинской АН, поч. чл. Пет. АН (1776)).

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом **вариации произвольной постоянной**.

Вернемся к поставленной задаче:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем.

$$y' + P(x)y = 0$$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-\int P(x) dx}$$

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C_1 некоторой функцией от x .

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x) dx} + C_1(x) e^{-\int P(x) dx} \cdot (-P(x));$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x) dx} - C_1(x) P(x) e^{-\int P(x) dx} + P(x) C_1(x) e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x) dx} = Q(x);$$

Из этого уравнения определим переменную функцию $C_1(x)$:

$$dC_1(x) = Q(x) e^{\int P(x) dx} dx;$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1 = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C;$$

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем:

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right).$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Далее рассмотрим примеры решения различных дифференциальных уравнений различными методами и сравним результаты.

Пример. Решить уравнение $x^2 y' + y = ax^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду: $y' + \frac{1}{x^2} y = a e^{\frac{1}{x}}$.

Применим полученную выше формулу: $P = \frac{1}{x^2}$; $Q = a e^{\frac{1}{x}}$;

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2} dx} \left(\int a e^{\frac{1}{x}} e^{\int \frac{1}{x^2} dx} dx + C \right); \quad y = e^{\frac{1}{x}} \left(\int a e^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} dx + C \right) = e^{\frac{1}{x}} \left(\int a dx + C \right);$$

$$y = e^{\frac{1}{x}} (ax + C).$$

Уравнение Бернулли.

Определение. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + Py = Q \cdot y^n,$$

где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному.

Для этого разделим исходное уравнение на y^n .

$$\frac{y'}{y^n} + P \frac{1}{y^{n-1}} = Q;$$

Применим подстановку, учтя, что $z' = -\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$.

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q$$

$$z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$$

Т.е. получилось линейное уравнение относительно неизвестной функции z .

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$z = e^{-\int P dx} \left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx} dx + C \right)$$
$$Q_1 = -(n-1)Q; \quad P_1 = -(n-1)P.$$

Пример. Решить уравнение $xy' + y = xy^2 \ln x$.

Разделим уравнение на xy^2 : $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \ln x$.

Полагаем $z = \frac{1}{y}$; $z' = -\frac{y'}{y^2}$.

$$-z' + \frac{1}{x}z = \ln x; \quad z' - \frac{1}{x}z = -\ln x.$$

Полагаем $P = -\frac{1}{x}$, $Q = -\ln x$.

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(\int -\ln x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx + C \right); \quad z = e^{\ln x} \left(\int -\ln x e^{-\ln x} dx + C \right)$$

$$z = x \left(\int -\ln x \cdot \frac{dx}{x} + C \right); \quad z = x \left(-\int \ln x d(\ln x) + C \right)$$

$$z = x \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right)$$

Произведя обратную подстановку, получаем:

$$\frac{1}{y} = x \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right).$$

Пример. Решить уравнение $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$.

Разделим обе части уравнения на $x\sqrt{y}$.

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} \sqrt{y} = x.$$

Полагаем $z = \sqrt{y}$; $z' = \frac{1}{2\sqrt{y}} y'$; $y' = 2\sqrt{y}z'$;

$$\frac{1}{\sqrt{y}} 2\sqrt{y}z' - \frac{4}{x}z = x; \quad \frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2};$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Рассмотрим соответствующее ему линейное однородное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = 0; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x};$$

$$\int \frac{dz}{z} = 2 \int \frac{dx}{x} + C_1; \quad \ln z = 2 \ln x + \ln C; \quad z = Cx^2;$$

Полагаем $C = C(x)$ и подставляем полученный результат в линейное неоднородное уравнение, с учетом того, что:

$$\frac{dz}{dx} = 2xC(x) + x^2 \frac{dC(x)}{dx};$$

$$2xC(x) + x^2 \frac{dC(x)}{dx} - \frac{2x^2C(x)}{x} = \frac{x}{2};$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{2x}; \quad C(x) = \frac{1}{2} \ln x + C_2;$$

Получаем: $z = x^2 \left(C_2 + \frac{1}{2} \ln x \right)$;

Применяя обратную подстановку, получаем окончательный ответ:

$$y = x^4 \left(C_2 + \frac{1}{2} \ln x \right)^2;$$

Уравнения в полных дифференциалах (тотальные).

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u = F(x, y)$.

Интегрирование такого уравнения сводится к нахождению функции u , после чего решение легко находится в виде: $du = 0$; $u = C$.

Таким образом, для решения надо определить:

- 1) в каком случае левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал функции u ;
- 2) как найти эту функцию.

Если дифференциальная форма $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции u , то можно записать:

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

$$\text{Т.е.} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \end{cases}.$$

Найдем смешанные производные второго порядка, продифференцировав первое уравнение по y , а второе – по x :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

Приравнявая левые части уравнений, получаем **необходимое и достаточное условие** того, что левая часть дифференциального уравнения является полным дифференциалом. Это условие также называется **условием тотальности**.

$$\boxed{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}$$

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении собственно функции u .

Проинтегрируем равенство $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$:

$$u = \int M(x, y) dx + C(y).$$

Вследствие интегрирования получаем не постоянную величину C , а некоторую функцию $C(y)$, т.к. при интегрировании переменная y полагается постоянным параметром.

Определим функцию $C(y)$.

Продифференцируем полученное равенство по y .

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + C'(y).$$

Откуда получаем: $C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$.

Для нахождения функции $C(y)$ необходимо проинтегрировать приведенное выше равенство. Однако, перед интегрированием надо доказать, что функция $C(y)$ не зависит от x . Это условие будет выполнено, если производная этой функции по x равна нулю.

$$\begin{aligned} [C'(y)]'_x &= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int M(x, y) dx \right) = \\ &= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Теперь определяем функцию $C(y)$:

$$C(y) = \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy + C$$

Подставляя этот результат в выражение для функции u , получаем:

$$u = \int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy + C.$$

Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$\boxed{\int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy = C.}$$

Следует отметить, что при решении уравнений в полных дифференциалах не обязательно использовать полученную формулу. Решение может получиться более компактным, если просто следовать методу, которым формула была получена.

Пример. Решить уравнение $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$

Проверим условие тотальности: $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2 + 10xy)}{\partial y} = 10x;$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2 - 1)}{\partial x} = 10x.$$

Условие тотальности выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Определим функцию u .

$$u = \int M(x, y)dx + C(y) = \int (3x^2 + 10xy)dx + C(y) = x^3 + 5x^2y + C(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 + C'(y) = N(x, y) = 5x^2 - 1;$$

$$C'(y) = -1; \quad C(y) = \int (-1)dy = -y + C_1;$$

Итого, $u = x^3 + 5x^2y - y + C_1$.

Находим общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$u = x^3 + 5x^2y - y + C_1 = C_2;$$

$$x^3 + 5x^2y - y = C.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Власов В.Г.* Конспект лекций по высшей математике. М.: Рольф, 1996.
2. *Гусак А.А.* Высшая математика. В 2-х т. Минск: Петра Система, 2000.
3. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Л.* Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х ч. М.: Высш. шк., 1996.
4. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ: в 2-х т. М.: Высш. шк., 1980.
5. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: Учеб. пособ. 4-е изд.; стер. –СПб.: Изд-во "Лань", 2005.
6. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. В 2-х т. М.: Наука, 1975.
7. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2-х т. М.: Интеграл-Пресс, 1997.